

Kombinace bez opakování

Ⓟ Kolik trojic lze vytvořit z prvků A, B, C, D, E (žádný se nesmí opakovat), jestliže na pořadí prvků

a) ZÁLEŽÍ vyb. trojice z 5 prvků, zál. na pořadí $V(3, 5) = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

b) NEZÁLEŽÍ vyb. trojice z 5ti prvků, ale na pořadí nezáleží $\Rightarrow$ KOMBINACE bez opak.

- všech uspoř. trojic je $V(3, 5)$, některé jsou stejné

- např. A, B, C A, C, B B, A, C B, C, A C, A, B C, B, A

- stejných je $P(3)$ (tolik, kolik je POŘADÍ – permutací ze 3 prvků)

$$p = \frac{V(3, 5)}{P(3)} = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} = 10 = K(3, 5) = \binom{5}{3} \dots \text{kombinační číslo}$$

K-ČLENNÁ KOMBINACE z n prvků (bez opakování) je neuspořádaná k-tice sestavená z prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou (žádný se neopakuje)

- jde o k-prvkovou podmnožinu množiny obsahující n prvků

- POČET všech k-členných kombinací z n prvků (KOMBINACE k-té třídy z n prvků)

$$K(k, n) = \frac{V(k, n)}{P(k)} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k} \quad n \geq k; \quad n, k \in N_0$$

KOMBINAČNÍ ČÍSLO $\binom{n}{k}$ (čteme: en nad ká) (více viz článek Vlastnosti kombinačních čísel)

- platí $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ Ⓟ $\binom{8}{2} = \left[\frac{8!}{(8-2)! \cdot 2!} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 2!} \right] = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$

Ⓟ $\binom{8}{6} = \left[\frac{8!}{(8-6)! \cdot 6!} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2! \cdot 6!} \right] = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$ $\binom{8}{6} = \binom{8}{8-6} = \binom{8}{2}$

- platí $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $\binom{n}{1} = n$ $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{n} = 1$ $\binom{0}{0} = 1$

Ⓟ $\binom{5}{1} = \left[\frac{5!}{(5-1)! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 4!}{4!} \right] = 5$ $\binom{5}{0} = \left[\frac{5!}{(5-0)! \cdot 0!} = \frac{5!}{5! \cdot 1} \right] = 1$

$\binom{0}{0} = \left[\frac{0!}{(0-0)! \cdot 0!} = \frac{1}{1 \cdot 1} \right] = 1$ $\binom{5}{5} = \left[\frac{5!}{(5-5)! \cdot 5!} = \frac{5!}{0! \cdot 5!} = \frac{1}{1 \cdot 1} \right] = 1$

Ⓟ $\binom{n}{3} = \left[\frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \right] = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$ (lze počítat i rychleji)

Příklady

① Petr má 7 knih, Ivana 10 knih. Kolika způsoby si Petr může vyměnit 2 své knihy za 2 knihy Ivaniny?

vyb. 2 knihy ze 7 P a 2 knihy z 10 I

$$p = K(2, 7) \cdot K(2, 10) = \binom{7}{2} \cdot \binom{10}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} \cdot \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 21 \cdot 45 = 945$$

- ② Kolika způsoby lze 8 hostů rozmístit do tří pokojů (1 dvoulůžkový, 2 třílůžkové)?

2 H z 8 do dvoulůžk., nezál. na poř. – $K(2, 8) = \binom{8}{2}$ a pak 3 H ze zbýv. 6 (8 – 2) do

3lůžk. – $K(3, 6) = \binom{6}{3}$ a pak zbýv. 3 H do 3 lůžk. – $K(3, 3) = \binom{3}{3}$

$$p = \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 28 \cdot 20 \cdot 1 = 560$$

[nebo nejprve 3 H z 8 do třílůžk., nezál. na poř. – $K(3, 8) = \binom{8}{3}$ a pak 3 H ze zbýv. 5 do 3lůžk. – $K(3, 5) = \binom{5}{3}$ a pak zbýv. 2 H do 2 lůžk. – $K(2, 2) = \binom{2}{2}$]

- ③ Kolika způsoby je možné ze 7 mužů a 4 žen vybrat šestičlennou skupinu, v níž jsou

a) právě 2 ženy

2 Ž ze 4 a 4 M ze 7 (skupiny – nezáleží na pořadí – kombinace bez opak.)

$$p = K(2, 4) \cdot K(4, 7) = \binom{4}{2} \cdot \binom{7}{4} = \binom{4}{2} \cdot \binom{7}{3} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 = 210$$

b) aspoň 2 ženy

(2 Ž ze 4 a 4 M ze 7) nebo (3 Ž ze 4 a 3 M ze 7) nebo (4 Ž ze 4 a 2 M ze 7)

$$p = \binom{4}{2} \cdot \binom{7}{4} + \binom{4}{3} \cdot \binom{7}{3} + \binom{4}{4} \cdot \binom{7}{2}$$

- ④ V sérii 12 výrobků jsou 3 vadné. Kolika způsoby lze vybrat

a) 6 výrobků na pořadí nezáleží $\Rightarrow$ kombinace – vybereme 6 výrobků z 12

$$p = K(6, 12) = \binom{12}{6}$$

b) 6 výrobků, z nichž je právě jeden vadný

vybereme 1 vadný ze 3 a 5 dobrých z 9 (12 – 3)

$$p = K(1, 3) \cdot K(5, 9) = \binom{3}{1} \cdot \binom{9}{5}$$

c) 6 výrobků, z nichž je aspoň 1 vadný

vyb. 1 V ze 3 a 5 D z 9 nebo vyb. 2 V ze 3 a 4 D z 9 nebo vyb. 3 V ze 3 a 3 D z 9

$$p = K(1, 3) \cdot K(5, 9) + K(2, 3) \cdot K(4, 9) + K(3, 3) \cdot K(3, 9)$$

$$p = \binom{3}{1} \cdot \binom{9}{5} + \binom{3}{2} \cdot \binom{9}{4} + \binom{3}{3} \cdot \binom{9}{3}$$

- ⑤ Určete, kolika způsoby lze z 20 osob vybrat 10 tak, aby mezi vybranými

a) nebyl pan A

$$\text{pana A vyřadíme, vybíráme 10 osob z už jen 19} \quad p = K(10, 19) = \binom{19}{10}$$

b) nebyli zároveň pánové A a B

počet všech – počet „byli A a B“

$$p = K(10, 20) - K(8, 18) = \binom{20}{10} - \binom{18}{8}$$

$$\begin{matrix} A & B & \dots & 8 & z & 18 & \dots \end{matrix}$$

c) byl aspoň jeden z pánů A, B

(byl A) nebo (byl B) nebo (byli A a B)

$$p = K(9, 19) + K(9, 19) + K(8, 18) = \binom{19}{9} + \binom{19}{9} + \binom{18}{8}$$

- ⑥ Určete kolika způsoby může m chlapců a n dívek utvořit taneční pár.

$$\text{vyb. 1 CH z } m \text{ a 1 D z } n \quad p = K(1, m) \cdot K(1, n) = \binom{m}{1} \cdot \binom{n}{1} = m \cdot n$$

- ⑦ Herní systém hokejového turnaje pro 10 mužstev spočívá v tom, že v každé ze 2 skupin po pěti mužstvech sehraje každé s každým 1 zápas, první dvě mužstva z obou skupin postoupí do finále, kde opět každé s každým sehraje 1 zápas, ale s výjimkou mužstev, která již spolu hrála ve skupině. Určete celkový počet zápasů v turnaji.

$$1. \text{ sk.} + 2. \text{ sk.} + \text{finále 4 družstev} - 2 \text{ (už spolu hrála ve skupině)}$$

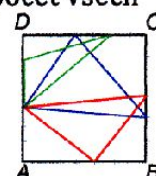
$$p = \binom{5}{2} + \binom{5}{2} + \binom{4}{2} - 2 = 2 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} + \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} - 2 = 20 + 6 - 2 = 24$$

- ⑧ Je dán čtverec ABCD a na každé jeho straně n ($n \geq 3$) vnitřních bodů. Určete počet všech trojúhelníků s vrcholy v těchto bodech.

na pořadí nezáleží – kombinace

počet trojic ze všech bodů – počet trojic bodů v přímce na každé ze stran

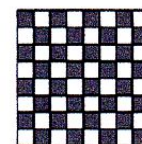
$$p = \binom{4n}{3} - 4 \binom{n}{3}$$



- ⑨ Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8×8 vybrat

a) trojici políček vyb. trojici políček z 64, nezáleží na poř. – kombinace

$$p = K(3, 64) = \binom{64}{3} \left(\left[\frac{64!}{(64-3)! \cdot 3!} = \frac{64 \cdot 63 \cdot 62 \cdot 61!}{61! \cdot 3!} \right] = \frac{64 \cdot 63 \cdot 62}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 32 \cdot 21 \cdot 62 \right)$$



b) trojici políček neležících v témže sloupci

počet všech – počet trojic ležících v témže sloupci (celkem 8 sl., takže 8krát)

$$p = K(3, 64) - 8 \cdot K(3, 8) = \binom{64}{3} - 8 \cdot \binom{8}{3}$$

c) trojici políček neležících v témže sloupci ani v téže řadě

počet všech – počet trojic ležících v témže sloupci (celkem 8 sl., takže 8krát)

– počet trojic ležících v téže řadě (celkem 8 řad, takže 8krát)

$$p = K(3, 64) - 8 \cdot K(3, 8) - 8 \cdot K(3, 8) = \binom{64}{3} - 16 \cdot \binom{8}{3}$$

d) trojici políček, která nejsou téže barvy

1. zp. počet = počet všech – počet trojic černých – počet trojic bílých

$$p = K(3, 64) - K(3, 32) - K(3, 32) = \binom{64}{3} - 2 \cdot \binom{32}{3}$$

2. zp. vyb. (1 Č z 32 a 2 B z 32) nebo (2 Č z 32 a 1 B z 32)

$$p = K(1, 32) \cdot K(2, 32) + K(2, 32) \cdot K(1, 32) = 2 \cdot \binom{32}{1} \binom{32}{2}$$

- ⑩ V rovině dáno n bodů, z nichž p leží na jedné přímce, kromě nich žádné tři body na téže přímce neleží. Určete, kolik je těmito body určeno

a) přímek přímka určena 2 různými body

všechny 2jice bez všech 2jic ležících na jedné přímce + 1 přímka určená p body na ní ležících

$$x = \binom{n}{2} - \binom{p}{2} + 1$$

b) trojúhelníků trojúhelník určen 3 různými body neležícími v jedné přímce

všechny trojice – všechny trojice ležící na jedné přímce (neurčují žádný troj.)

$$x = \binom{n}{3} - \binom{p}{3}$$

c) kružnic kružnice urč. 3 různými body nelež. v jedné přímce (jako troj.), ale i 4, 5, ...

bodů může určovat jednu kružnici $\Rightarrow$ méně kružnic (ze zadání nelze přesně určit)

$$x \leq \binom{n}{3} - \binom{p}{3}$$